绝密 ★ 考试结束前

全国2015年4月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

说明: 在本卷中,A^{T}表示矩阵A的转置矩阵,A^*表示矩阵A的伴随矩阵,E是单位矩阵,$|A|$表示方阵A的行列式,$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩。

一、单项选择题(本大题共5小题,每小题2分,共10分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 设a,b为实数,且$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$,则

A. $a=0,b=1$　　B. $a=1,b=0$　　C. $a=0,b=0$　　D. $a=1,b=1$

2. 若$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & y \end{pmatrix}$,且$2A=B$,则

A. $x=1$,$y=2$　　B. $x=2$,$y=1$　　C. $x=1$,$y=1$　　D. $x=2$,$y=2$

3. 已知A是2阶可逆矩阵,则下列矩阵中与A等价的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4．设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $-1, 1, 1$，则齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5．矩阵 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 有一个特征值为

A．-3　　B．-2　　C．1　　D．2

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|3\boldsymbol{A}^{-1}|=$__________.

7．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=$__________.

8．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}=$__________.

9．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则内积 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=$__________.

10．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(k-1,4,2)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则数 $k=$__________.

11．与向量 $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 均正交的一个单位向量为__________.

12．向量空间 $\mathbf{V}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}} \mid x_1, x_2\in\mathbf{R}\}$ 的维数为__________.

13．若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则数 $a=$__________.

14．矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的两个特征值之和为__________.

15．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$ 的矩阵为__________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

17．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，求行列式 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}+2\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值.

18．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,-6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,10)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．问数 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=2 \end{cases}$ 有无穷多解？并求出其通解.

（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）

21．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

22．用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题（本题 7 分）

23．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆.