绝密 ★ 考试结束前

全国2021年4月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

1．请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2．答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明：在本卷中，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$是单位矩阵，$|\boldsymbol{A}|$表示方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．已知4阶行列式D的某一行元素及其余子式都为$a\ (a\neq 0)$，则$D=$

A．0　　B．a^2　　C．$-a^2$　　D．$4a^2$

2．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，则$(2\boldsymbol{A})^{*}=$

A．$2\boldsymbol{A}^{-1}$　　B．$2^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$　　C．$2^{n-1}|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$　　D．$\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3．设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$均为$n$阶方阵，且满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则

A．$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$　　B．$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　C．$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AC}$　　D．$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$

4．齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解的充分必要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$的

A．列向量组线性相关　　B．列向量组线性无关

C．行向量组线性相关　　D．行向量组线性无关

5．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的关系为

A．相似但不合同　　B．合同但不相似

C．合同且相似　　D．不合同也不相似

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．行列式$\begin{vmatrix} 101 & 100 & 201 \\ 202 & 200 & 398 \\ 297 & 300 & 601 \end{vmatrix}=$________.

7．设3阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{2}{3}$，则$|2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

8．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

9．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{PAP}=$________.

10．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

11．设矩阵$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$的秩为2，则常数$a=$________.

12．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a)^{\mathrm{T}}$线性相关，则数$a=$________.

13．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为0，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$通解为________.

14．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-1,0,2$，则$|\boldsymbol{A}|=$________.

15．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$正定，则$t$的取值范围为________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．计算4阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

17．已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，求（1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$；（2）$\boldsymbol{A}^{2019}$.

18. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{X}$满足关系式$2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，求$\boldsymbol{X}$.

19. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-3,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(6,17,-9,-9)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用所求的极大线性无关组表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-\ x_4=4\\2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=5\\x_1-\ x_2-\ x_3+4x_4=a\end{cases}$$

当a为何值时，方程组无解？有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4&-2\\-4&2&2\\-2&2&-1\end{pmatrix}$的特征值与特征向量.

22. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$化为标准形$5y_1^2-y_2^2-y_3^2$，求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设$\boldsymbol{A}$为3阶可逆矩阵，若3维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.