

2022 年 10 月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明:在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

A. -4

B. -2

C. 2

D. 4

2. 设 A 为 3 阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则用 P 左乘 A , 相当于将 A

A. 第 1 行的 3 倍加到第 2 行

B. 第 1 列的 3 倍加到第 2 列

C. 第 2 行的 3 倍加到第 1 行

D. 第 2 列的 3 倍加到第 1 列

3. 设向量组 $\alpha_1 = (2, 1, -3)^T$, $\alpha_2 = (-4, k, 6)^T$ 线性相关, 则数 $k =$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

4. 设线性方程组
$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$$
 无解, 则数 $k =$

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 的规范形为

- A. $z_1^2 + z_2^2$ B. $z_1^2 - z_2^2$ C. $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ D. $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 设
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3$$
, 则
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - 2a_{11} & 4a_{12} \\ a_{21} & a_{23} - 2a_{21} & 4a_{22} \\ a_{31} & a_{33} - 2a_{31} & 4a_{32} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 设
$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
, 则 D 的展开式中 x 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 A 为 3 阶可逆矩阵, 且 $|A| = 2$, 则 $|-A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 若矩阵 A 中有一个 2 阶子式不为零, 且所有 3 阶子式均为零, 则 $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ 与 $\alpha_2 = (2, 3, a)^T$ 正交, 则数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设有向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 II: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. 若 I 线性相关, 则 II 的线性相关性为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 则数 k 应满足的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 且满足 $|2A - E| = 0$, 则 A^{-1} 必有一个特征值为_____.
14. 设 2 阶矩阵 A 的特征值为 2, 5, 则 $|A + E| =$ _____.
15. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + (a-2)x_3^2 + 4x_1x_2$ 正定, 则数 a 应满足的条件是_____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分.

16. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (1, 2, 3), C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $AB - (BA)C^T$

18. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. (1) 求 A^{-1} ; (2) 解矩阵方程 $AX = B$.

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 2, -1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)^T, \alpha_5 = (1, 2, 4, -3)^T$ 的秩和一个极大线性无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表示.

20. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = a \end{cases}$, 当常数 a 为何值时, 方程组有无穷多解?

并求其通解 (要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 判定 A 是否可以相似对角化? 并说明理由.

22. 求正交变换 $x = Py$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + c_1\alpha_4, \alpha_2 + c_2\alpha_4, \alpha_3 + c_3\alpha_4$ 线性无关 (其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数) .