绝密 ★ 考试结束前

2023年4月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明： 在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$M_{ij}$为元素$a_{ij}(i,j=1,2)$的余子式，若$M_{11}=2, M_{12}=3$，$M_{21}=4, M_{22}=5$，则$A=$

A. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

2. 设A为2阶矩阵，若已知$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则$A^*=$

A. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

3. 设线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 的值为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值 $\lambda=$

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+5x_3^2$ 的正惯性指数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}=$________.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1,0)$，则 $\boldsymbol{AB}=$ __________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，若存在矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|-2\boldsymbol{A}^{-1}|=$________.

10. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-2,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-4,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

11. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为________.

12．若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵经初等行变换化为 $\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\0&1&2&-2\end{array}\right)$，则方程组的通解是___________.

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=8$，若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为________.

14．若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ 可与对角矩阵相似，则数 $a=$________.

15．二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1x_2$ 的规范形为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3+x\\a_1&a_2+x&a_3\\a_1+x&a_2&a_3\end{vmatrix}$.

17．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，求行列式 $\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值.

18．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&-2&3\\0&1&-3\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 1,\ 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-1,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,8,8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,8,9)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

20．确定当数 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4=2\\x_1+2x_2-2x_3-2x_4=-1\\2x_1-x_2+x_3+x_4=a\end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$可以对角化，$\lambda=2$为$A$的2重特征值，求$x,y$的值.

22．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$，求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型化为标准形.

四、证明题：本题7分。

23．设3阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足关系式$2\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可逆.