绝密 ★ 考试结束前

2023年4月高等教育自学考试

线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明：在本卷中，A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$M_{ij}$为元素$a_{ij}(i,j=1,2)$的余子式，若$M_{11}=2, M_{12}=3$，$M_{21}=4, M_{22}=5$，则$A=$

A. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，则$A^*$中位于第1行第2列的元素是

A. -3　　B. -2

C. 2　　D. 3

3．已知3×4矩阵A的行向量组线性无关，则$r(A)=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．设2阶矩阵A满足$|2E+3A|=0$，$|E-A|=0$，则$|A^{-1}+E|=$

A．-1　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．1

5．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+5x_3^2$的正惯性指数是

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．行列式$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=$________.

7．设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，则$AB=$__________.

8.设A为2阶矩阵,若存在矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,使得$C^{\mathrm{T}}AC=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,则$A=$________.

9．设A为3阶矩阵，且$|A|=2$，则$|-2A^{-1}|=$________.

10．已知向量组$\alpha_1=(1,k,-3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,4,-6)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$的秩为2，

则数$k=$________.

11．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \quad\quad =0 \\ \quad\quad x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为________.

12．非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵经初等行变换化为 $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2\end{array}\right)$，则方程组的通解是 ____________.

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=8$，若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为________.

14．若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 可与对角矩阵相似，则数 $a=$________.

15．二次型 $f(x_1,x_2)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经正交变换 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2\\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2\end{cases}$ 化为 $2y_1^2-y_2^2$，则原二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ____________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 设 4 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$，其中 M_{ij} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的余子式（$i,j=1,2,3,4$），求 $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}$.

17．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，求行列式 $\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值.

18．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 1,\ 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-1,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,8,8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,8,9)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

20．确定当数a为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ \quad\quad x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$可以对角化，$\lambda = 2$为$\boldsymbol{A}$的2重特征值，求$x, y$的值.

22．设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$，求正交变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型化为标准形.

四、证明题：本题7分。

23．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$满足关系式$2\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$．证明$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$可逆.