绝密 ★ 考试结束前

2023年10月高等教育自学考试
线性代数(经管类)试题
课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明：在本卷中，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$是单位矩阵，$|\boldsymbol{A}|$表示方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设$\boldsymbol{A}$为2阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{1}{2}$，则$|-2\boldsymbol{A}|=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

2. 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为n阶矩阵，m,n均为大于1的整数，则必有

A. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　　B. $(\boldsymbol{AB})^{m}=\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{B}^{m}$

C. $|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$　　D. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

3. 设n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关$(n>m>1)$，则下列结论中正确的是

A. 向量组中增加任意一个向量后仍然线性无关

B. 向量组中减少任意一个向量后仍然线性无关

C. 存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$

D. 向量组至少有一个向量可以由其余向量线性表出

4．已知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是其导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，$k_1,k_2$是任意常数，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解可以表为

A．$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　　B．$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$

C．$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$　　D．$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

5．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，若$\boldsymbol{A}$的特征值为$0,1,2$，则$\boldsymbol{B}$的迹$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．已知3阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=d$，则$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ 2b_1 & 4b_2 & 6b_3 \\ 3c_1 & 6c_2 & 9c_3 \end{vmatrix}=$________.

7．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{AB}=$________.

8．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=$________.

9．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{A}^*|=$________.

10．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & k \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$的列向量组线性相关，则数$k=$________.

11．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个解，如果$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则数$k_1,k_2$必满足$k_1+k_2=$________.

12．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$，$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$表示$\boldsymbol{\alpha}_i$与$\boldsymbol{\alpha}_j$的内积，

则$\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=$________.

13．设 2 阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，若$\boldsymbol{A}$的特征值为-3和 2，则矩阵$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$的全部特征值为________.

14．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_2x_3$的秩为________.

15．已知实对称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$合同，则实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的规范形为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16．计算 4 阶行列式$D=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&a&a\\1&a&0&a\\1&a&a&0\end{vmatrix}$.

17．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为 3 阶矩阵，且满足$\boldsymbol{BA}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{B}$．若已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$.

18．已知矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\varLambda}$满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\varLambda}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^3$.

19．求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&-2\\1&1&0&3\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$的列向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余列向量由该极大线性无关组线性表出.

20. 问 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 4 \end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$，且 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，属于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

22. 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3$ 化为标准形，并写出所作的正交变换.

四、证明题：本题 7 分。

23. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 证明：如果 $k_1 \neq 0$，则向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.