绝密 ★ 考试结束前

2023 年 10 月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明： 在本卷中，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 表示方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 已知 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m$ ，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = n$，则 $\begin{vmatrix} b_1 - c_1 & a_1 \\ b_2 - c_2 & a_2 \end{vmatrix} =$

A. $-m+n$　　B. $-m-n$　　C. $m-n$　　D. $m+n$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则下列矩阵运算中有意义的是

A. $\boldsymbol{ABC}$　　B. $\boldsymbol{BCA}$　　C. $\boldsymbol{CBA}$　　D. $\boldsymbol{CAB}$

3. 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $(n > m > 1)$，则下列结论中正确的是

A. 向量组中增加任意一个向量后仍然线性无关

B. 向量组中减少任意一个向量后仍然线性无关

C. 存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$

D. 向量组至少有一个向量可以由其余向量线性表出

4．若线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-4x_2+kx_3=3 \end{cases}$无解，则数$k=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

5．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，若$\boldsymbol{A}$的特征值为$0,1,2$，则$\boldsymbol{B}$的迹$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．3阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}=$________.

7．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=$________.

8．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=$________.

9．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{A}^*|=$________.

10．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & k \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$的列向量组线性相关，则数$k=$________.

11．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个解，如果$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则数$k_1,k_2$必满足$k_1+k_2=$________.

12．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$的内积$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=$________.

13．已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$相似，则$|\boldsymbol{A}|=$________.

14．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2-(x_2-x_3)^2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ________.

15．设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2+tx_2^2+x_3^2$ 为正定二次型，则数 t 的取值范围是________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16．求 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{vmatrix}$ 的值.

17．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{BA}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{B}$．求 $\boldsymbol{B}$．

18．已知矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Lambda}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^3$．

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．问 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2=3\\4x_1+7x_2+x_3=10\\2x_1+3x_2+ax_3=4\end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&-1&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，判定 $\boldsymbol{A}$ 能否与对角矩阵相似，说明理由.

22．用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2-2x_1x_3$ 化为标准形，并写出所作的正交变换.

四、证明题：本题 7 分。

23．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 n 维向量，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.